# “SHARTLI TENGSIZLIKLAR: OLIMPIADA MASALALARI ASOSIDA YONDASHUVLAR” SONLARNI TAQQOSLASH

**Safarova Dilnura Sunnatovna**
BDTU akademik litseyi. “Aniq fanlar” yo‘nalishi
chet tili-matematika guruhi talabasi

Sonlarni taqqoslash degani ulardan qaysi biri katta qaysi biri kichik ekanligini aniqlashdir. Taqqoslash natijasini “>”, “<” va “=” ishoralar yordamida yoziladi.a>b yozuvi a ning b dan aniq katta ekanini bildiradi. “>”, “<” ishoralar qat’iy tengsizlik ishoralari deyiladi. "≥" -katta yoki teng, "≤" - kichik yoki teng ishoralari noqat’iy tengsizlik ishoralari deyiladi. Agar a va b berilgan sonlar bo’lsa a>b va a<b ifodalar sonli tengsizliklar deyiladi.Sonli tengsizliklar to’g’ri yoki noto’g’ri bo’lishi mumkin.

**Misol:** To’g’ri tengsizliklar: 5>3, 12>8 va noto’g’ri tengsizliklar: 4>6, 879<700

$a \geq b$ tengsizlik a>b yoki a=b munosabatlardan bittasi bajarilganda to’g’ri hisoblanadi.

**Misol:** $7 \geq 5,\ 123 \geq 45,\ 8 \geq 8$ to’g’ri tengsizliklardir

***Sonli tengsizliklarni xossalari.***

**Xossa:** Agar a>b va b>c bo’lsa u holda a>c bo’ladi

**Xossa:** Agar to’g’ri sonli tengsizlikning ikkala qismiga ayni bir xil son qo’shilsa yana to’g’ri sonli tengsizlik hosil bo’ladi.Ya’ni a>b va c-ixtiyoriy son bo’lsa a+c>b+c bo’ladi.

**Xossa:** To’g’ri sonli tengsizlikning istalgan hadini uning bir qismidan ikkinchi qismiga shu had ishorasini qarama-qarshisiga o’zgartirib o’tkazish mumkin.Bunda tengsizlik ishorasi o’zgarmaydi.Ya’ni a>b+c bo’lsa a-c>b bo’ladi.

**Xossa**: Tengsizlikning ikkala qismini ayni bir noldan farqli songa ko'paytirish yoki bo'lish mimkin.Bunda agar o'sha son musbat bo'lsa tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.Agar o'sha son manfiy bo'lsa tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.Ya'ni:

a>b va c>0 bo'lsa, ac>bc; a>b va c<0 bo'lsa, ac<bc

***Sonli tengsizliklarni qo'shish, ayirish,ko'paytirish va bo'lish.***

**Qo'shish:** Bir xil sonli tengsizliklarni hadma-had qo'shish mumkin.Bunda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.

$1)(a > b) + (c > d) \Rightarrow (a + c > b + d)$ $2)(a < b) + (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d)$

**Ayirish:** Bir xil ishorali tengsizliklarni quyidagicha ayiriladi.

$(a > b) - (c > d) \Rightarrow (a - d > b - c)$ Ya'ni proporsiya usulida ayriladi.

**Misol:** $(7 > 6) - (3 > -2) \Rightarrow (7 - (-2) > 6 - 3) = (9 > 3)$

**Ko'paytirish :** a>0; b>0; c>0; d>0 va a>b va c>d bo'lsa bu tengsizliklarni hadma-had ko'paytirish mumkin.Bunda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.

$(a > b) \cdot (c > d) \Rightarrow (ad > bc)$ masalan: $(7 > 5) \cdot (3 > 2) \Rightarrow (7 \cdot 3 > 5 \cdot 2) = (21 > 10)$

**Bo'lish:** Barcha hadlari musbat bo'lgan a>b va c>d sonli tengsizliklar quyidagicha bo'linadi.

$(a > b) : (c > d) \Rightarrow (a : d > b : c) = (\frac{a}{d} > \frac{b}{c})$ Masalan: $(8 > 5) : (4 > 2) \Rightarrow (\frac{8}{2} > \frac{5}{4}) = (4 > 1\frac{1}{4})$

***Eng ko'p uchraydigan muhim tengsizliklar.***

**1)** a>b bo'lsa b<a bo'ladi

**2)** a>b bo'lsa -a<-b bo'ladi

**3)** $a$>0,b>0 va a>b bo'lsa, u holda $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ bo'ladi

**4)** a>0 b>0 va a>b bo'lsa u holda $a^2>b^2$ bo'ladi, va $a^n>b^n$ $(n \in N)$

Bu xossaga ko'ra taqqoslash qiyinroq bo'lgan 2 ta son berilganda bu sonlarning kvadratlarini taqqoslab,qaysi birining kvadrati katta bo'lsa o'sha sonning o'zi ham katta bo'ladi.

**Misol:** Taqqoslang:

$a = \sqrt{1995} + \sqrt{1997}$ va $b = 2\sqrt{1996}$ ikkalasini ham kvadratga ko'taramiz.

$a^2 = (\sqrt{1995} + \sqrt{1997})^2 = 1995 + 2\sqrt{1995} \cdot \sqrt{1997} + 1997 = 2 \cdot 1996 + 2 \cdot \sqrt{1996 - 1} \cdot \sqrt{1996 + 1} =$

$= 2 \cdot 1996 + 2 \cdot \sqrt{1996^2 - 1}$ $b^2 = (2\sqrt{1996})^2 = 4 \cdot 1996$ demak, $a^2 < b^2$ bundan

$a < b$ kelib chiqadi.

**5)** $a$-har qanday son bo'lganda ham $a^2 \geq 0$ bo'ladi

**6)** $a$-har qanday son bo'lganda ham $-a^2 \leq 0$ bo'ladi

**7)** $a$ va b -har qanday son bo'lganda ham $(a \pm b)^2 \geq 0$, $-(a \pm b)^2 \leq 0$ bo'ladi

**8)** Agar $a > 0$ bo'lsa $a + \frac{1}{a} \geq 2$ bo'ladi

**9)** Agar $a < 0$ bo'lsa $a + \frac{1}{a} \geq -2$ bo'ladi.

**10)** Agar $a \cdot b > 0$ bo'lsa $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ bo'ladi

**11)** Agar $a \cdot b < 0$ bo'lsa $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq -2$ bo'ladi

**12)** $a \geq 0, b \geq 0$ bo'lsin $\frac{a+b}{2}$ - shu sonlarning o'rta arifmetigi deyiladi.

$\sqrt{ab}$ - shu sonlarning o'rta geometrigi yoki o'rta proporsionali deyiladi.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

**Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.**

**13)** $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$, bunda $a > 0$;

**14)** $\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

**15)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$

**16)** $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

**17)** Ixtiyoriy musbat haqiqiy $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlar uchun:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}\geq n$$

**18)** $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\ n\geq 3.$

**19)** $2^n < n^2,\ n\geq 5.$

**Misol:** Tenglamani yeching: $\max(2x; 3-x) = \min(5+2x; 6x)$

Shu tenglamani yechish uchun quyidagi tengliklardan foydalanamiz:

$$\max(a;b)=\frac{a+b+|a-b|}{2};\quad \text{va}\quad \min(a;b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Formuladan foydalansak, javob 3/7 chiqadi.

**Eslatma**: Ayrim misollarda taqqoslashni osonlashtirish maqsadida masala shartiga mos sonlar tanlash mumkin.

**Misol:** Agar $a<0<b$ va $|a|>|b|$ bo'lsa, $\frac{1}{a^3+b^3}, \frac{1}{a^4+b^3}, \frac{1}{a^3}$ ni taqqoslang

$$\text{I-usul}: \frac{1}{a^3+b^3}, \frac{1}{a^4+b^3}, \frac{1}{a^3} \quad a^3 < a^3+b^3 < a^4+b^3$$

$$\frac{1}{a^4+b^3} < \frac{1}{a^3} < \frac{1}{a^3+b^3}$$

$$\text{II-usul}: a=-2 \text{ va } b=1 \text{ desak, } \frac{1}{a^3+b^3}=-\frac{1}{7},\ \frac{1}{a^4+b^3}=\frac{1}{17}, \frac{1}{a^3}=-\frac{1}{8}$$

Demak: $\frac{1}{a^4+b^3} < \frac{1}{a^3} < \frac{1}{a^3+b^3}$

**Misol:** $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 29,\quad b=15^{29}$ taqqoslang .Yechish:

$a=(1\cdot 29)\cdot(2\cdot 28)\cdot\underbrace{(3\cdot 27)\cdot(4\cdot 26)\cdot ...\cdot(14\cdot 16)}_{14\ \text{taqavs}}\cdot 15$ eng kattasi $(14\cdot 16)$

$b=\underbrace{(15\cdot 15)\cdot(15\cdot 15)\cdot(15\cdot 15)\cdot(15\cdot 15)\cdot ...\cdot(15\cdot 15)}_{14\ \text{taqavs}}\cdot 15$ eng kattasi $(15\cdot 15)$

$(14\cdot 16) < (15\cdot 15) \quad 224 < 225 \quad J: a < b$

**Olimpiada masalalaridan namunalar:**

**Problem 1:** a,b va c sonlari musbat haqiqiy sonlar bo'lsa, ushbu tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}$$

**Solution:** $2ab\leq a^2+b^2$ bundan $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ va $4abc\leq 2c(a^2+b^2)$ tengsizliklari kelib chiqadi ixtiyoriy musbat a,b,c haqiqiy sonlar uchun. Ikkala tengsizliklarni qo'shib yuborishdan

$(a+b)^2+4abc\leq 2(a^2+b^2)(c+1)$ tengsizlikni olamiz. Bundan $\frac{8}{(a+b)^2+4abc}\geq\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}$ kelib chiqdi. AM-GM tengsizligiga ko'ra,

$\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq 2\sqrt{\frac{2}{c+1}}=\frac{4}{\sqrt{2(c+1)}}$ va boshqa tomondan

$\frac{c+3}{8}=\frac{(c+1)+2}{8}\geq\frac{\sqrt{2(c+1)}}{4}$ tengligi ham bor. Ikkala tengsizlikni umumlashtirsak $\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{8}{c+3}$ hosil bo'ladi. Va tengsizlik isbotlandi.

**Problem 2:** Barcha $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nomanfiy haqiqiy sonlar ketma-ketliklarini toping, bunda quyidagi shartlar bajarilsin:

1)$x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_{2020}$

2)$x_{2020}\leq x_1+1$

3)$(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ lar $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ ketma-ketlikning permutatsiyasi bo'lib, $\sum_{i=1}^{2020}(x_i+1)^2(y_i+1)^2=8\sum_{i=1}^{2020}x_i^3$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

**Solution:** $x_i-x_j>1$ (i, j)bo'lsa $\Rightarrow 1\leq i<j\leq 2020\Rightarrow$

$x_{2020}\geq\cdots\geq x_{i+1}\geq x_i>x_j+1\geq x_{j-1}+1\geq\cdots\geq x_1+1\Rightarrow$

$x_1+1\geq x_{2020}>x_1+1$ demak, ziddiyat!

**Claim:** $|a-b|\leq 1\Rightarrow(a+1)^2(b+1)^2\geq 4(a^3+b^3)$ ekanligini isbotlaymiz. $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow(a+b)(1+ab)\leq\frac{(a+b+1+ab)^2}{4}=\frac{(a+1)^2(b+1)^2}{4}$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a-b)^2+ab)\leq$ $(a+b)(1+ab)$ $\Rightarrow \boldsymbol{4(a^3+b^3)\leq(a+1)^2(b+1)^2}$ tenglik sharti (a,b)=(1,0),(2,1) holatlarda bajariladi.

$$(x_1+1)^2(y_1+1)^2\geq 4(x_1^3+y_1^3)$$

$$(x_2+1)^2(y_2+1)^2\geq 4(x_2^3+y_2^3)$$

…

$(x_{2020}+1)^2(y_{2020}+1)^2\geq 4(x_{2020}^3+y_{2020}^3)$ barcha tengsizliklarni qo'shib yuborsak ⇒

$\sum_{i=1}^{2020}(x_i+1)^2(y_i+1)^2\geq 4[x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{2020}^3+y_1^3+y_2^3+$ $\cdots+y_{2020}^3]$ =8 $[x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{2020}^3]$ demak.

Tenglik shartigina o'rinli bo'lar ekan, demak (1,1,…,1,2,2,…,2) va (0,0,…,0,1,1,…,1) larning permutatsiyalari yagona yechim bo'la oladi.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:**

1.Abduhamidov A. U. Nasimov X. A. Algebra va matematik analiz asoslari. I qism. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma. –T., 2000.

2. Nasimov X.va boshqalar Algebra va analiz asoslarifanidan masalalar to'plam. T.2004.

3. Halimov S.S, Qanoatova D.S. "Algebra" fanidan ma'ruzalar to'plami 1-qism Buxoro 2019 yil